PCF

[Plotkin1977]

~ une version réduite
de Caml,
Haskell,
etc.

Types

- Langage typé:

$$\begin{array}{rcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \mathtt{int} \\ & | & \sigma \rightarrow \tau \end{array}$$

Syntaxe

- Variables $x_\tau, y_\tau, z_\tau, \ldots,$ de chaque type $\boldsymbol{\tau}$
- Constantes entières *n*, type `int`
- Application *uv*, de type $\boldsymbol{\tau}$ si $u{:}\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\tau}$, $v{:}\boldsymbol{\sigma}$
- Letrec *f*(*x*)=*u* in *v* : λ ($f{:}\boldsymbol{\sigma}\to\boldsymbol{\tau}$, $x{:}\boldsymbol{\sigma}$, $u{:}\boldsymbol{\tau}$, $v{:}\lambda$)
- *u*+*v*, –*u* de type `int` si *u*, *v* de type `int`
- if *u*=0 then *v* else *w* : $\boldsymbol{\tau}$, si *u* : `int`, *v*, *w* : $\boldsymbol{\tau}$

Sém. dénotationnelle

$[\![\texttt{int}]\!]= \mathbb{Z}_\perp \qquad [\![\sigma \to \tau]\!] = [[\![\sigma]\!] \to [\![\tau]\!]]$

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x_\tau]\!]\,\rho & = & \rho(x_\tau) \\
[\![\dot{n}]\!]\,\rho & = & n \\
[\![uv]\!]\,\rho & = & [\![u]\!]\,\rho([\![v]\!]\,\rho) \\
[\![\texttt{letrec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u\ \texttt{in}\ v]\!] & = & [\![v]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto [\![\texttt{rec}\ \ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u]\!]\,\rho]) \\
[\![\texttt{rec}\ \ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u]\!]\,\rho & = & \mathrm{lfp}(F^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u}) \\
 & & \text{où } F^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u}(\varphi) = (V \in [\![\sigma]\!] \mapsto [\![u]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \varphi, x_\sigma \mapsto V])) \\
[\![u \dot{+} v]\!]\,\rho & = & \left\{ \begin{array}{ll} [\![u]\!]\,\rho + [\![v]\!]\,\rho & \text{si } \ [\![u]\!]\,\rho \neq \perp, [\![v]\!]\,\rho \neq \perp \\ \perp & \text{sinon} \end{array} \right. \\
[\![\dot{-} u]\!]\,\rho & = & \left\{ \begin{array}{ll} -\,[\![u]\!]\,\rho & \text{si } \ [\![u]\!]\,\rho \neq \perp \\ \perp & \text{sinon} \end{array} \right. \\
[\![\texttt{if}\ u = 0\ \texttt{then}\ v\ \texttt{else}\ w]\!]\,\rho & = & \left\{ \begin{array}{ll} [\![v]\!]\,\rho & \text{si } \ [\![u]\!]\,\rho = 0 \\ [\![w]\!]\,\rho & \text{si } \ [\![u]\!]\,\rho \neq \perp, 0 \\ \perp & \text{si } \ [\![u]\!]\,\rho = \perp \end{array} \right.
\end{array}
$$

Bonne définition

- **Prop.** Pour toute $e{:}\tau$, $[\![e]\!] : Env \to [\![\tau]\!]$ est bien définie, et Scott-continue.
- Preuve: par récurrence sur la structure de e
- On doit montrer la bonne définition **et** la Scott-continuité en même temps, pour pouvoir appliquer lfp (boucles `while`).
- Nécessite aussi de montrer lfp : $[X \to X] \to X$ Scott-continue!

Les fonctions

- … sont codées comme de vraies fonctions, en sémantique dénotationnelle.
- En sémantique opérationnelle, on veut les coder comme des structures concrètes (pointeur vers du code?)
- La différence n'apparaissait pas avec Imp (langage d'ordre 1: pas de fonction comme valeur).

Une idée naturelle

- P-valeurs=entiers | fonctions `rec` $f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma)=u$
- Quel est le problème avec les règles ci-dessous?

$$\frac{E \vdash u \Rightarrow \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u' \quad E \vdash v \Rightarrow p \qquad E[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u', x_\sigma \mapsto p] \vdash u' \Rightarrow p'}{E \vdash uv \Rightarrow p'}\,(App)$$

$$\frac{E[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u] \vdash v \Rightarrow p}{E \vdash \texttt{letrec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u \;\texttt{in}\; v \Rightarrow p}$$

Les clôtures

- Une **clôture** est un couple formé d'une fonction et d'un environnement local à la fonction.

$$\frac{E \vdash u \Rightarrow \langle \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u', E' \rangle \quad E \vdash v \Rightarrow p \qquad E'[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \langle \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u', E' \rangle, x_\sigma \mapsto p] \vdash u' \Rightarrow p'}{E \vdash uv \Rightarrow p'} \;(Ap$$

$$\frac{E[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \langle \texttt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u, E \rangle] \vdash v \Rightarrow p}{E \vdash \texttt{letrec}\; f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u \;\texttt{in}\; v \Rightarrow p}$$

P-valeurs, env.syntaxiques

clôtures

$$\frac{}{\vdash \dot{n} : \mathtt{int}} \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\vdash E \text{ Env}}{\vdash \langle \mathtt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u, E\rangle : \sigma \to \tau}$$
si u est une expression de type τ,
et $\text{fv}(u) \smallsetminus \{f_{\sigma\to\tau}, x_\sigma\} \subseteq \text{dom } E$

$$\frac{\vdash p_1 : \tau_1 \quad \ldots \quad \vdash p_n : \tau_n}{\vdash [x_{1\,\tau_1} \mapsto p_1, \cdots, x_{n\,\tau_n} \mapsto p_n] \text{ Env}}$$

où fv(*u*) = variables libres de *u*

- Il va falloir définir les valeurs de ces p-valeurs…
- $[\![n]\!]=n$ OK, mais
  $[\![\langle \mathtt{rec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma)=u, E\rangle]\!]=?$

Sém. à grands pas

(en appel par valeur)

$$\frac{}{E \vdash x_\tau \Rightarrow E(x_\tau)}\ (Var) \quad \text{si } x_\tau \in \mathrm{dom}\ E \qquad\qquad \frac{}{E \vdash \dot{n} \Rightarrow \dot{n}}\ (Cst)$$

$$\frac{E \vdash u \Rightarrow \langle \mathtt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u', E'\rangle \quad E \vdash v \Rightarrow p \qquad E'[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \langle \mathtt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u', E'\rangle, x_\sigma \mapsto p] \vdash u' \Rightarrow p'}{E \vdash uv \Rightarrow p'}\ (App)$$

$$\frac{E[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \langle \mathtt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u, E\rangle] \vdash v \Rightarrow p}{E \vdash \mathtt{letrec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u\ \mathtt{in}\ v \Rightarrow p}$$

$$\frac{E \vdash u \Rightarrow \dot{n}_1 \quad E \vdash v \Rightarrow \dot{n}_2}{E \vdash u \dot{+} v \Rightarrow \dot{n}}\ (\dot{+}) \quad \text{où } n = n_1 + n_2 \qquad\qquad \frac{E \vdash u \Rightarrow \dot{n}}{E \vdash \dot{-}u \Rightarrow \dot{-}n}\ (\dot{-})$$

$$\frac{E \vdash u \Rightarrow \dot{0} \quad E \vdash v \Rightarrow p}{E \vdash \mathtt{if}\ u = 0\ \mathtt{then}\ v\ \mathtt{else}\ w \Rightarrow p}\ (\mathtt{if}_0) \qquad\qquad \frac{E \vdash u \Rightarrow \dot{n} \quad E \vdash w \Rightarrow p}{E \vdash \mathtt{if}\ u = 0\ \mathtt{then}\ v\ \mathtt{else}\ w \Rightarrow p}\ (\mathtt{if}_1) \quad \text{si } n \neq 0$$

P-valeurs, env.syntaxiques

clôtures

$$\frac{}{\vdash \dot{n} : \mathtt{int}} \quad \text{si } n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\vdash E \text{ Env}}{\vdash \langle \mathtt{rec}\, f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u, E\rangle : \sigma \to \tau}$$

si u est une expression de type τ, et $\mathrm{fv}(u) \smallsetminus \{f_{\sigma\to\tau}, x_\sigma\} \subseteq \mathrm{dom}\, E$

$$\frac{\vdash p_1 : \tau_1 \quad \ldots \quad \vdash p_n : \tau_n}{\vdash [x_{1\,\tau_1} \mapsto p_1, \cdots, x_{n\,\tau_n} \mapsto p_n] \text{ Env}}$$

où fv(u) = variables libres de u

- Il va falloir définir les valeurs de ces p-valeurs…
- $[\![n]\!]=n$ OK, mais $[\![\langle \mathtt{rec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma)=u, E\rangle]\!]=?$

Correction

- **Defn.** (Valeurs des p-valeurs.)
  $[\![n]\!]=n$,
  $[\![\langle \texttt{rec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma)=u, E\rangle]\!]=[\![\texttt{rec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma)=u]\!]\rho$
  où $\rho=[\![E]\!]$ $(=\mathrm{lfp}(F^\rho_{f,x,u}))$
- $[\![E]\!] = [x_1\mapsto[\![p_1]\!], \ldots, x_n\mapsto[\![p_n]\!]]$
  où $E = [x_1\mapsto p_1, \ldots, x_n\mapsto p_n]$
- **Prop.** Si $E \vdash u \Rightarrow p$ est dérivable,
  alors $[\![u]\!]\rho=[\![p]\!]$, où $\rho=[\![E]\!]$.

Adéquation

- **Conjecture.** Si $[\![u]\!]\rho = [\![p]\!]$, où $\rho = [\![E]\!]$, alors $E \vdash u \Rightarrow p$ est dérivable.
- Votre avis?

Adéquation

- **Conjecture.** Si $[\![u]\!]\rho = [\![p]\!]$, où $\rho = [\![E]\!]$, alors $E \vdash u \Rightarrow p$ est dérivable.

- Votre avis?
  … si ça peut vous aider, regardez:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{letrec } f_{\texttt{int}\to\texttt{int}}(x_{\texttt{int}}) = \dot{3} \texttt{ in} \\
\texttt{letrec } g_{\texttt{int}\to\texttt{int}}(x_{\texttt{int}}) = g_{\texttt{int}\to\texttt{int}}(x_{\texttt{int}}) \texttt{ in} \\
\qquad f_{\texttt{int}\to\texttt{int}}(g_{\texttt{int}\to\texttt{int}}\dot{0}).
\end{array}
$$

Adéquation

- **Conjecture (fausse).**
  Si $[\![u]\!]\rho = [\![p]\!]$, où $\rho = [\![E]\!]$,
  alors $E \vdash u \Rightarrow p$ est dérivable.

- Problème principal:
  - La sémantique opérationnelle est en **appel par valeurs**, la sémantique dénotationnelle en **appel par nom**.

Adéquation [Plotkin77]

- Plotkin définit une sémantique opérationnelle en **appel par nom**
- Montre l'adéquation aux types de base (int)
- Pas d'adéquation aux types fonction (pourquoi?)
- Et Plotkin va beaucoup plus loin…

Sém. dénotationnelle

(en appel par valeur)

$$[\![\texttt{int}]\!]^V = \mathbb{Z} \qquad [\![\sigma \to \tau]\!]^V = [[\![\sigma]\!]^V \to [\![\tau]\!]] \qquad [\![\tau]\!] = [\![\tau]\!]^V_\bot$$

$$\begin{array}{rcl}
[\![x_\tau]\!]\,\rho & = & \rho(x_\tau) \\
[\![\dot{n}]\!]\,\rho & = & n \\
[\![uv]\!]\,\rho & = & \begin{cases} \bot & \text{si } [\![u]\!]\,\rho = \bot \text{ ou } [\![v]\!]\,\rho = \bot \\ [\![u]\!]\,\rho([\![v]\!]\,\rho) & \text{sinon} \end{cases} \\
[\![\texttt{letrec } f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u \texttt{ in } v]\!]\,\rho & = & [\![v]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto [\![\texttt{rec } f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u]\!]]) \\
[\![\texttt{rec } f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u]\!]\,\rho & = & \mathrm{lfp}^V(F^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u}) \\
 & & \text{où } F^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u}(\varphi) = (V \in [\![\sigma]\!]^V \mapsto [\![u]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \varphi, x_\sigma \mapsto V])) \\
[\![u \dot{+} v]\!]\,\rho & = & \begin{cases} [\![u]\!]\,\rho + [\![v]\!]\,\rho & \text{si } [\![u]\!]\,\rho \neq \bot, [\![v]\!]\,\rho \neq \bot \\ \bot & \text{sinon} \end{cases} \\
[\![\dot{-}u]\!]\,\rho & = & \begin{cases} -[\![u]\!]\,\rho & \text{si } [\![u]\!]\,\rho \neq \bot \\ \bot & \text{sinon} \end{cases} \\
[\![\texttt{if } u = 0 \texttt{ then } v \texttt{ else } w]\!]\,\rho & = & \begin{cases} [\![v]\!]\,\rho & \text{si } [\![u]\!]\,\rho = 0 \\ [\![w]\!]\,\rho & \text{si } [\![u]\!]\,\rho \neq \bot, 0 \\ \bot & \text{si } [\![u]\!]\,\rho = \bot \end{cases}
\end{array}$$

Adéquation

- **Thm.** Si $[\![u]\!]\rho=[\![p]\!]$, où $\rho=[\![E]\!]$,
  dans la sémantique en appel par valeurs,
  et si u est d'un type de base,
  alors $E \vdash u \Rightarrow p$ est dérivable.

- **Preuve:** complexe, utilise une notion de *relation logique*.
  Les plus courageux feront l'exercice 23 des notes de cours (`prog1 sem2.pdf`)

Abstraction complète

- … échoue pour PCF, tant en appel par nom qu'en appel par valeur.
- Problème: le ou parallèle (*por*),

$$por(1)(1) = 1 \quad por(0)(n) = por(n)(0) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}_\perp$$
$$por(m)(n) = \perp \text{ dans tous les autres cas.}$$

et le goûteur de ou parallèle

$$\texttt{letrec}\ g(f) = f\,\dot{1}\,\dot{1} \mathbin{\dot{-}} \dot{1} = 0 \wedge f\,\dot{0}\,\Omega = 0 \wedge f\,\Omega\,\dot{0} = 0\ \texttt{in}\ g$$

- Ce problème a fait couler beaucoup d'encre depuis 1977… (résolu).

Sémantique par continuations

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x_\tau]\!]^\circ \rho\kappa & = & \kappa(\rho(x_\tau)) \\
[\![\dot{n}]\!]^\circ \rho\kappa & = & \kappa(n) \\
[\![uv]\!]^\circ \rho\kappa & = & [\![u]\!]\,\rho(f \in [\![\sigma \to \tau]\!]^\circ \mapsto [\![v]\!]\,\rho(f\kappa)) \\
[\![\texttt{letrec}\ f_{\sigma\to\tau}(x_\sigma) = u\ \texttt{in}\ v]\!]\,\rho\kappa & = & [\![v]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \mathrm{lfp}(T^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u})])\kappa \\
 & & \text{où } T^\rho_{f_{\sigma\to\tau},x_\sigma,u}(\varphi) = (\kappa \in [\![\tau]\!]^\perp \mapsto \\
 & & \qquad (V \in [\![\sigma]\!]^\circ \mapsto [\![u]\!]\,(\rho[f_{\sigma\to\tau} \mapsto \varphi, x_\sigma \mapsto V])\kappa)) \\
[\![u \dot{+} v]\!]\,\rho\kappa & = & [\![u]\!]\,\rho(m \in \mathbb{Z} \mapsto [\![v]\!]\,\rho(n \in \mathbb{Z} \mapsto \kappa(m+n))) \\
[\![\dot{-}u]\!]\,\rho\kappa & = & [\![u]\!]\,\rho(n \in \mathbb{Z} \mapsto \kappa(-n)) \\
[\![\texttt{if}\ u = 0\ \texttt{then}\ v\ \texttt{else}\ w]\!]\,\rho\kappa & = & [\![u]\!]\,\rho(n \in \mathbb{Z} \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} [\![v]\!]\,\rho\kappa & \text{si } n = 0 \\ [\![w]\!]\,\rho\kappa & \text{si } n \neq 0 \end{array} \right.)
\end{array}
$$

- Donc aussi plus faibles préconditions…